

Перемещения и деформации в точке тела. Тензор деформаций

При действии внешних нагрузок точки заданного деформируемого тела перемещаются в пространстве. Например, точка M (рис. 8) имела в исходном недеформированном состоянии координаты x, y, z . После деформации точка заняла положение M' и ее координаты стали равны

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w,$$

где u, v, w — проекции вектора перемещений точки M на оси x, y, z .

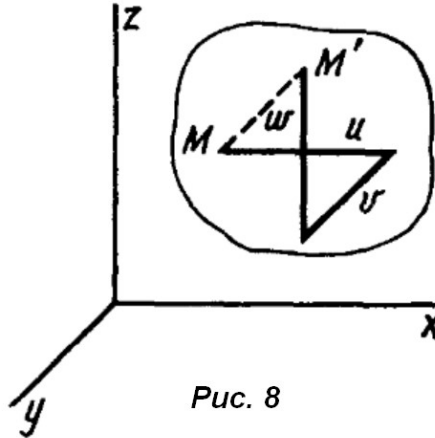


Рис. 8

Если рассмотреть поведение элементарного параллелепипеда, вырезанного в недеформированном состоянии в окрестности точки M , то в результате деформации в общем случае этот параллелепипед изменит и свой объем, и свою форму.

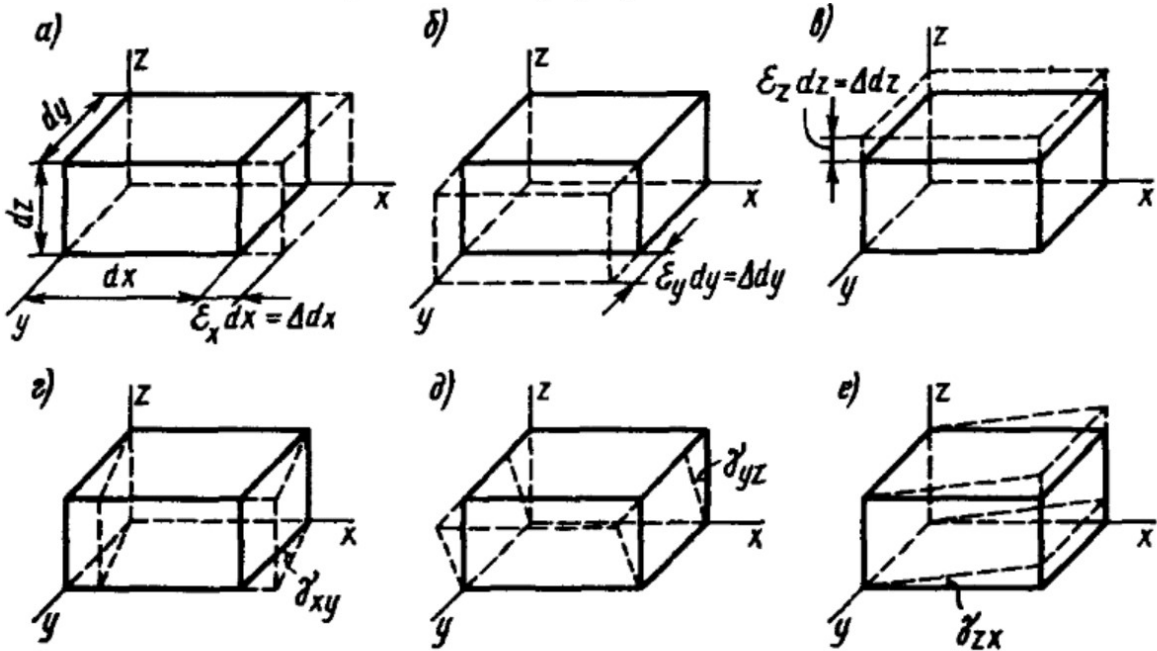


Рис. 9

Предполагая деформацию малой, представим ее в виде последовательности шести простейших деформаций, которые показаны на рис. 9, а...е.

Первые три деформации определяют удлинение ребер параллелепипеда в направлении одной из координатных осей

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx, \quad \Delta dy = \varepsilon_y dy, \quad \Delta dz = \varepsilon_z dz,$$

и поэтому такие деформации называют о с е в ы м и. Индекс в обозначении осевой деформации указывает ось, параллельно которой происходит удлинение ребра. Деформации считаются положительными, если они соответствуют удлинению ребра, отрицательными — укорочению.

Три другие деформации являются деформациями сдвига. Обозначаются они γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} . Индексы указывают, в какой координатной плоскости появляется угол сдвига между ребрами параллелепипеда. Деформации сдвига считаются положительными, если они отвечают уменьшению угла между соответствующими гранями параллелепипеда. В противном случае деформации отрицательны.

Заметим, что деформацию сдвига можно представить по-разному (рис. 10), однако во всех случаях она может быть приведена к одному виду. Деформация сдвига во втором (рис. 10, б) и в третьем (рис. 10, в) состояниях равна деформации сдвига в первом состоянии (рис. 10, а). Второе деформированное состояние (рис. 10, б) отличается от первого (рис. 10, а) жестким поворотом параллелепипеда на угол γ_{yx} против часовой стрелки, а третье состояние (рис. 1.10, в) — на угол $\frac{1}{2} \gamma_{yx}$. Для всех трех случаев характерно одно и то же напряженное состояние, так как поворот элементарного объема как жесткого целого не приводит к появлению в нем дополнительных усилий.

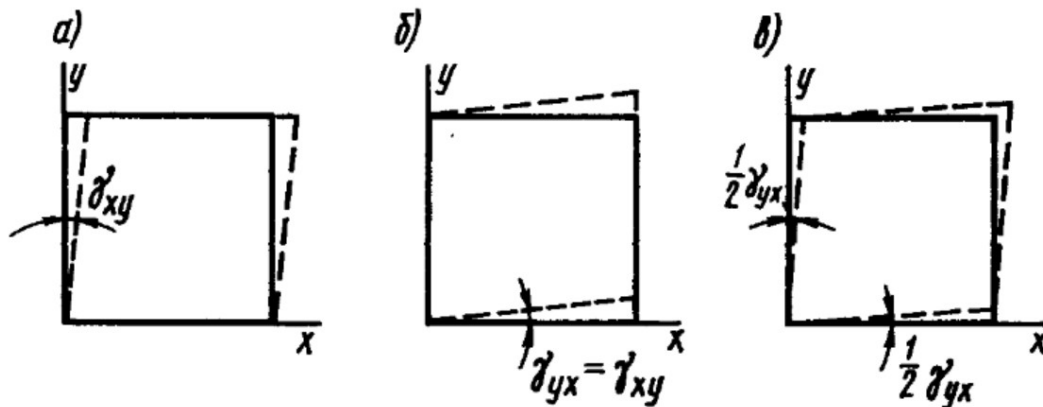


Рис. 10

Аналогично понятию тензора напряжений введем понятие тензора деформаций, который записывается следующим образом:

$$T_d = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Если ввести обозначения

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz}, \quad \dots,$$

то тот же тензор принимает вид

$$T_d = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Если в отношении тензора напряжений было сказано, что он полностью определяет напряженное состояние в точке тела, то о тензоре деформаций можно сказать, что он полностью определяет деформированное состояние в точке тела.

Главные деформации

По аналогии с теорией напряженного состояния можно показать, что в каждой точке существуют три взаимно перпендикулярных направления, по которым тело испытывает только деформации удлинения или укорочения, а деформации сдвига равны нулю. Эти осевые деформации называются главными деформациями ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 и находятся из кубического уравнения

$$\epsilon^3 - J_1 \epsilon^2 - J_2 \epsilon - J_3 = 0,$$

которое может быть получено из кубического уравнения (10) путем замены в нем нормальных напряжений $\sigma_x, \dots$ осевыми деформациями $\epsilon_x, \dots$, а касательных напряжений $\tau_{xy}, \dots$ — деформациями сдвига $\epsilon_{xy}, \dots$. Тогда инварианты тензора деформаций J_1, J_2, J_3 определяются выражениями

$$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z,$$

$$J_2 = \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) - \epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_y \epsilon_z - \epsilon_z \epsilon_x,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}.$$

Шаровой тензор деформаций и девиатор деформаций

Тензор деформаций можно представить в виде суммы шарового тензора деформаций $\mathbb{I}\mathbb{I}_{\text{д}}$ и девиатора деформаций $D_{\text{д}}$:

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_{\text{д}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{ср}} \end{pmatrix},$$

причем $\varepsilon_{\text{ср}} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$ — средняя деформация;

$$D_{\text{д}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}} & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}} \end{pmatrix}.$$

Шаровой тензор деформаций характеризует объемную деформацию в точке тела

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3 \varepsilon_{\text{ср}} = J_1,$$

а девиатор деформаций — деформацию изменения формы.

Очевидно, что первый инвариант девиатора деформаций равен нулю, а его второй инвариант

$$J_2^{\text{д}} = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right].$$

В теории пластичности используется понятие интенсивности деформаций сдвига $\gamma_{\text{н}}$.

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{н}} &= 2 \sqrt{J_2^{\text{д}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]}. \end{aligned}$$

При чистом сдвиге в плоскости xy деформации $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, а интенсивность $\gamma_{\text{н}}$ оказывается равной деформации сдвига $|\gamma_{xy}|$. Кроме интенсивности деформаций сдвига пользуются понятием интенсивности продольных деформаций

$$\varepsilon_{\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{\text{н}}.$$

Особенно просто интенсивность деформаций определяется через главные деформации:

$$\epsilon_{и} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}.$$

Введем понятие направляющего тензора деформаций

$$\bar{D}_д = \frac{2}{\gamma_{и}} D_д$$

относительно которого, так же как ранее относительно направляющего тензора напряжений, можно заметить, что его главные оси совпадают с главными осями тензора деформаций и что он полностью определяется его тремя главными направлениями и одной из главных деформаций или отношением любой пары главных деформаций между собой. Таким образом, так же как и тензор напряжений, тензор деформаций целиком определяется его направляющим тензором $\bar{D}_д$, объемной Θ (или средней $\epsilon_{ср}$) деформацией и интенсивностью деформаций сдвига $\gamma_{и}$, или интенсивностью деформаций $\epsilon_{и}$, или октаэдрическим сдвигом $\gamma_{окт}$.

Основные уравнения теории упругости

Три группы основных уравнений

Для получения упомянутых уравнений в декартовой системе координат мысленно выделим в окрестности некоторой точки тела элементарный параллелепипед с размерами dx , dy , dz . Первая группа уравнений выражает условия равновесия этого элемента среды, их называют **статическими уравнениями**.

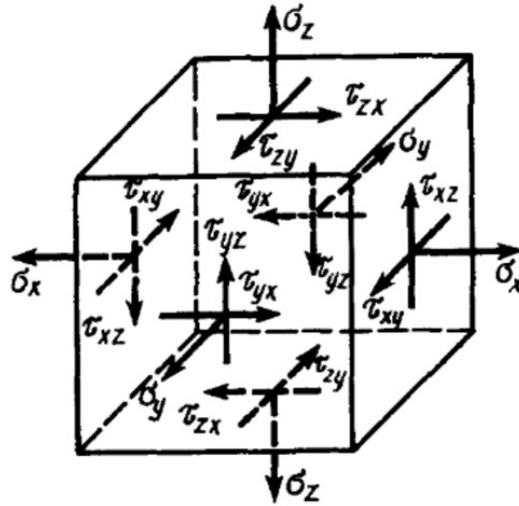
Вторая группа уравнений связывает деформации элемента тела с функциями, выражающими перемещения его точек. Они называются **геометрическими уравнениями**.

Наконец, последняя группа уравнений — это уравнение, которое выражает зависимость между напряжениями и деформациями элемента. Именно в этих уравнениях учитываются механические свойства материала, их называют **физическими**. В данном случае они будут выражать закон Гука.

Уравнения равновесия (статические уравнения)

Ранее при изучении напряженного состояния во внутренней точке тела мы рассматривали элементарный параллелепипед с гранями параллельными координатным плоскостям. Ввиду бесконечной малости параллелепипеда принималось, что напряжения во всем его объеме остаются неизменными (однородное напряженное состоя-

ние). Поэтому напряжения на параллельных гранях предполагаются равными, но противоположно направленными. По существу, это напряжения на трех взаимно ортогональных площадках, проведенных через рассматриваемую точку.



В данном случае задача иная. Все компоненты тензора напряжений в сплошной среде непрерывно изменяются от точки к точке тела, т. е. они являются непрерывными функциями координат

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z); \sigma_y = \sigma_y(x, y, z); \dots; \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y, z),$$

или в сокращенной форме

$$T_n = T_n(x, y, z).$$

Поэтому на рис. 1 изображена уточненная картина действия напряжений на гранях параллелепипеда. Если на левой грани элемента, проходящей через рассматриваемую точку A , принять напряжение σ_x , то на правой грани, имеющей координату $x + dx$, функция σ_x получит приращение, равное частному дифференциалу этой функции по аргументу x , т. е. будет $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. С учетом сказанного на рис. 1 показаны все компоненты напряжений.

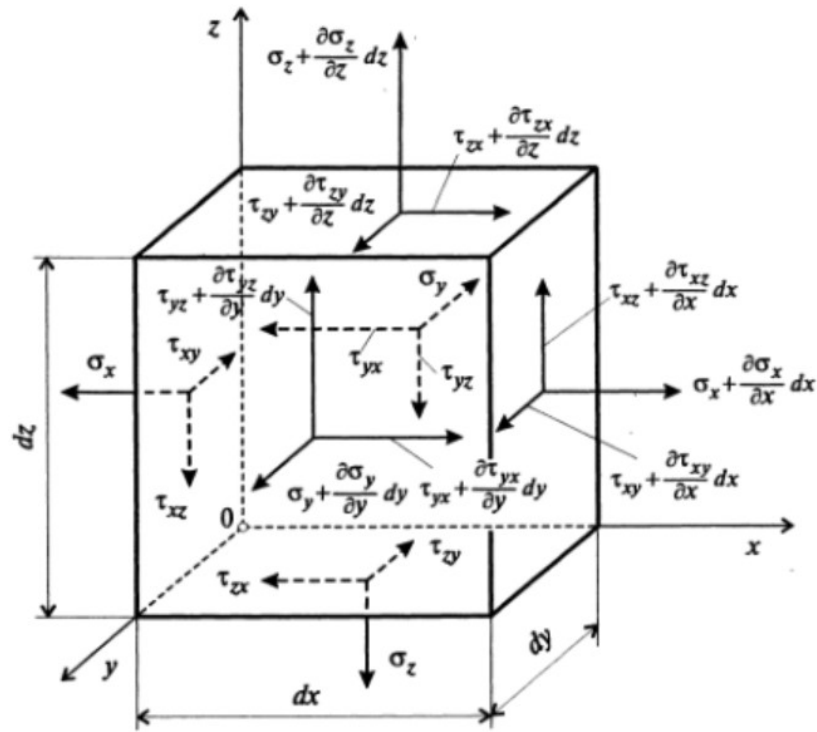


Рис. 1

Рассмотрим разложение в ряд

$$\sigma_x(x+dx, y, z) = \sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x(x)}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \sigma_x(x)}{\partial x^3} \cdot dx^3 + \dots$$

Ограничиваясь в нем двумя слагаемыми, получим $\sigma_x(x+dx, y, z) \approx \sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x(x)}{\partial x} dx$.

Предположим, что на тело действует некоторая объемная внешняя нагрузка, например, его вес, компоненты интенсивности которой обозначим X, Y, Z . Соответствующая элементарная сила в рассматриваемой точке получается как произведение интенсивности X, Y или Z на объем параллелепипеда $dx dy dz$. Элементарные силы на поверхностях граней параллелепипеда получаем как произведение напряжений или их дифференциалов на площади граней. Учитывая, что силы $\sigma_x dy dz$, $\tau_{yx} dx dz$ и $\tau_{zx} dx dy$ на параллельных гранях взаимно уравновешены, сумму проекций на ось x всех сил, действующих на элемент (рис. 1), составим в виде

$$X dx dy dz + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = 0.$$

Сокращая на $dx dy dz$ и аналогично записывая уравнения проекций на оси y и z , получим систему из следующих трех дифференциальных уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Приравняем нулю сумму моментов сил, действующих на параллелепипед, относительно оси, проходящей через его центр параллельно оси z , получим

$$(\tau_{yx} dz dx) dy - (\tau_{xy} dz dy) dx + \\ + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dz dx \right) \frac{dy}{2} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dz dy \right) \frac{dx}{2} = 0.$$

Отбросив последние два слагаемых, как бесконечно малые более высокого порядка и сокращая на $dx dy dz$, получаем $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Таким образом, в дополнение к (1) можем написать равенства, выражающие известный закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (2)$$

Сформулируем теперь условия на поверхности тела как граничные условия для дифференциальных уравнений (1). Они выражают равновесие между поверхностной нагрузкой $\vec{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$ и напряжениями в произвольной точке поверхности тела. На рис. 2, а

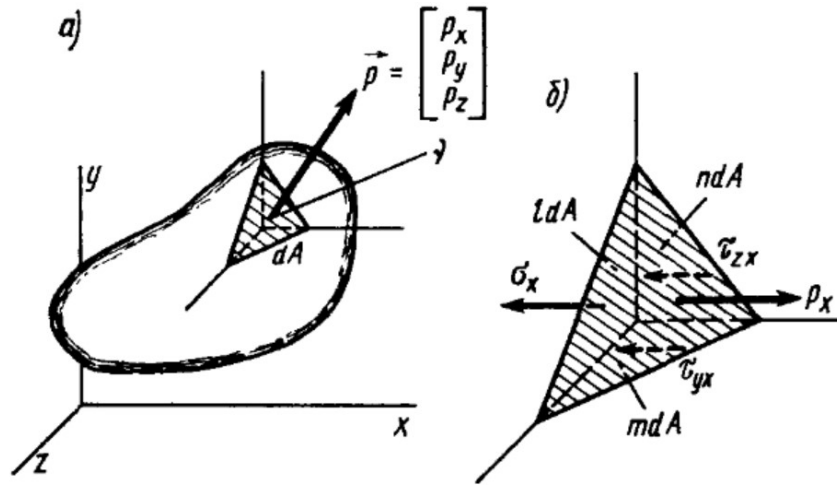


Рис. 2

показан элементарный тетраэдр, выделенный у поверхности тела сечениями, параллельными координатным плоскостям, и плоскостью, касательной к поверхности. Ориентацию последней определяет нормаль $\mathbf{n}$, направляющие косинусы которой обозначим

$$l = \cos(\angle x, \mathbf{n}); \quad m = \cos(\angle y, \mathbf{n}); \quad n = \cos(\angle z, \mathbf{n}).$$

На рис. 2, б изображен тот же тетраэдр, но с указанием на его гранях компонент напряжений и интенсивности поверхностной нагрузки. Для простоты на чертеже показаны лишь компоненты, параллельные оси x . Там же указаны площади граней ldA , mdA и ndA , где dA — площадь его наклонной грани. Если теперь составить условия равновесия тетраэдра в виде сумм проекций на оси x , y и z , как это делалось в Л.№1 для точки внутри тела, получим уравнения (1.4), в которых компоненты полного напряжения на наклонной площадке $\bar{X}_v$, $\bar{Y}_v$, $\bar{Z}_v$ надо соответственно заменить на компоненты поверхностной нагрузки p_x , p_y , p_z , а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= p_x; \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= p_y; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= p_z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$